ΗΥ-217, ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ

ΛΥΣΕΙΣ, 26-1-2017

ΘΕΜΑ 1º

(α) Από το Σχήμα 1, προκύπτει ότι:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & -\infty < x < 0 \\ \frac{1}{2}x & 0 \le x < 1 \\ 0.75 & 1 \le x < 2 \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} & 2 \le x < 2.5 \\ 1 & 2.5 \le x < +\infty \end{cases}$$

(β) $P(0.5 < X < 1) = F_X(1^-) - F_X(0.5) = 0.5 - \frac{1}{2}0.5 = 0.25$

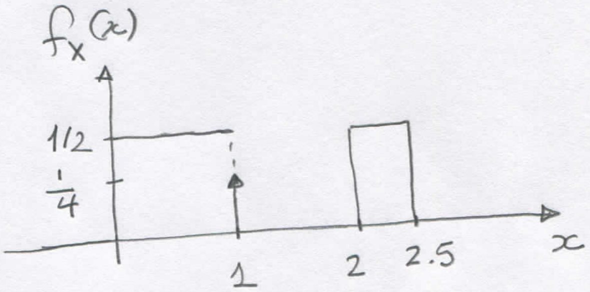
$P(0.5 < X \le 1) = F_X(1) - F_X(0.5) = 0.75 - \frac{1}{2}0.5 = 0.5$

(γ) $P(1 < X < 2) = F_X(2^-) - F_X(1) = 0.75 - 0.75 = 0$

$P(1 \le X < 2) = F_X(2^-) - F_X(1^-) = 0.75 - 0.5 = 0.25$

(δ) Παραγωγίζοντας την $F_X(x)$ έχουμε:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & 0 \le x < 1 \\ \frac{1}{4}\delta(x-1) & x = 1 \\ \frac{1}{2} & 2 \le x < 2.5 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$



(ε) $$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{2}x\,dx + \frac{1}{4}\cdot 1 + \int_2^{2.5} \frac{1}{2}x\,dx$$

$$= \frac{1}{4}x^2\Big|_0^1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}x^2\Big|_2^{2.5} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}(2.5^2 - 2^2) = \underline{1.0625}$$

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{2}x^2\,dx + \frac{1}{4}\cdot 1^2 + \int_2^{2.5} \frac{1}{2}x^2\,dx$$

$$= \frac{1}{6}x^3\Big|_0^1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}x^3\Big|_2^{2.5} = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}(2.5^3 - 2^3) = 1.6875$$

$$\therefore\ var(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = 1.6875 - 1.0625^2 = \underline{0.5586}$$

ΘΕΜΑ 2ο

(α) $E[A] = g\,E[R]$ και $var(A) = g^2\,var(R)$.

Αλλά $R \sim U[9,11]$. Από τους τύπους της ομοιόμορφης κατανομής:

$$E[R] = \frac{9+11}{2} = 10 \quad , \quad var(R) = \frac{(11-9)^2}{12} = \frac{1}{3} = 0.33$$

Συνεπώς, $\mu_A = E[A] = 10g$ και $\sigma_A^2 = var(A) = g^2/3$.

(β) $P(|A-\mu_A| > 2\sigma_A) = P(|A-10g| > \frac{2}{\sqrt{3}}g) = 1 - P(|A-10g| \leq \frac{2}{\sqrt{3}}g)$

$= 1 - P(-\frac{2}{\sqrt{3}}g \leq A-10g \leq \frac{2}{\sqrt{3}}g)$

$= 1 - P(-\frac{2}{\sqrt{3}}g \leq gR-10g \leq \frac{2}{\sqrt{3}}g)$

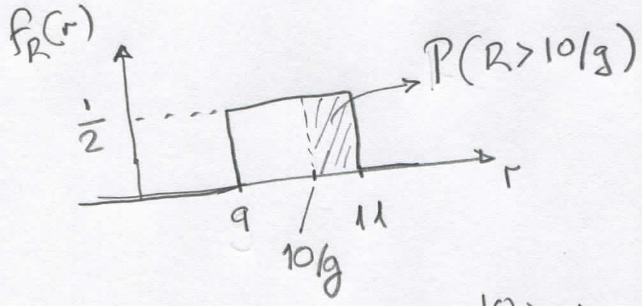
$= 1 - P(-\frac{2}{\sqrt{3}} \leq R-10 \leq \frac{2}{\sqrt{3}}) = 1 - P(10-\frac{2}{\sqrt{3}} \leq R \leq 10+\frac{2}{\sqrt{3}})$

$= 1 - P(8.84 \leq R \leq 11.15) = 1 - 1 = 0$ (αφού $R \sim U[9,11]$).

(γ) Θέλουμε: $P(A>10) \geq 0.8 \Rightarrow$

$P(gR>10) \geq 0.8 \Rightarrow P(R > \frac{10}{g}) \geq 0.8$

Ζητάμε το ελάχιστο g που να ικανοποιεί την παραπάνω ανισότητα. Καθώς η R είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στο $[9, 11]$, θα πρέπει $10/g \in [9, 11]$ ώστε $P(R > \frac{10}{g}) = (11 - \frac{10}{g}) \cdot \frac{1}{2}$

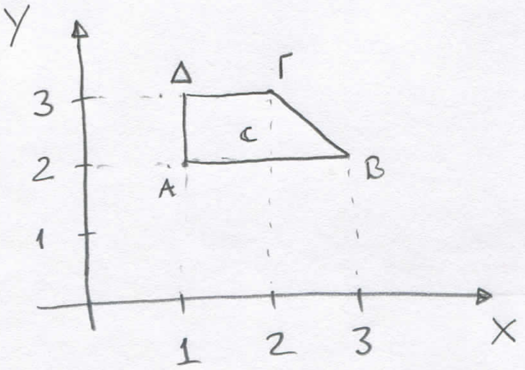


Επομένως $(11 - \frac{10}{g})\frac{1}{2} \geq 0.8 \Rightarrow 11 - \frac{10}{g} \geq 1.6 \Rightarrow$

$11 - 1.6 \geq \frac{10}{g} \Rightarrow g \geq \frac{10}{9.4} \Rightarrow g_{min} = 1.0638$.

ΘΕΜΑ 3ο

(α)



Πρέπει $c \cdot E_{ΑΒΓΔ} = 1$

$\Rightarrow c \cdot \frac{(1+2)\cdot 1}{2} = 1 \Rightarrow c = \frac{2}{3}$.

(β) Το πεδίο τιμών της τ.μ. X είναι το $[1,3]$.

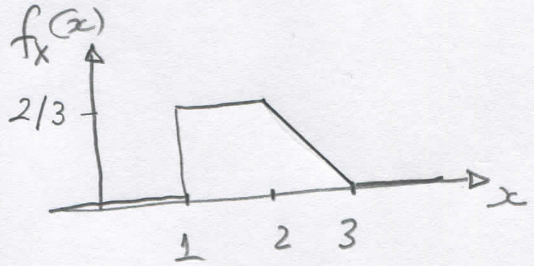
$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy$. Από το σχήμα έχουμε:

• Για $1 \le x \le 2$, $f_X(x) = \int_2^3 c\,dy = \frac{2}{3} y \Big|_2^3 = \frac{2}{3}(3-2) = \frac{2}{3}$.

• Για $2 \le x \le 3$, $f_X(x) = \int_2^{5-x} c\,dy = \frac{2}{3} y \Big|_2^{5-x} = \frac{2}{3}(5-x-2)$

$= 2 - \frac{2}{3}x$

$\therefore \quad f_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{3} & 1 \le x \le 2 \\ 2 - \frac{2}{3}x & 2 \le x \le 3 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$



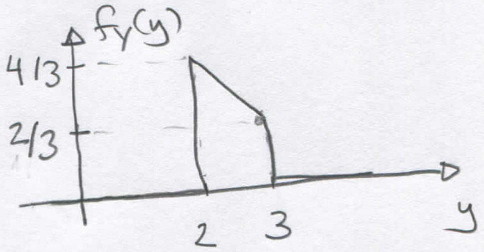
Το πεδίο τιμών της τ.μ. Y είναι το $[2,3]$.

$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx$. Για $2 \le y \le 3$:

$f_Y(y) = \int_1^{5-y} c\,dx = \frac{2}{3} x \Big|_1^{5-y} = \frac{2}{3}(5-y-1)$

$= \frac{2}{3}(4-y)$.

$\therefore \quad f_Y(y) = \begin{cases} \frac{2}{3}(4-y) & 2 \le y \le 3 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$

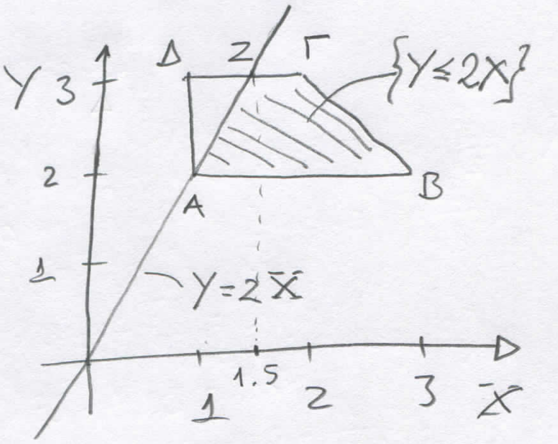


(γ) $f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$ Προφανώς η $f_{X|Y}(x|y)$ ορίζεται για τιμές της $y \in [2,3]$.

Τότε $f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \frac{2/3}{\frac{2}{3}(4-y)} = \frac{1}{4-y} & \text{όταν } 1 \le x \le 5-y \\ 0 & \text{όταν } x \notin [1, 5-y] \end{cases}$

$$\therefore \quad f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \dfrac{1}{4-y} & 1 \le x \le 5-y \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases} \qquad (y \in [2,3])$$

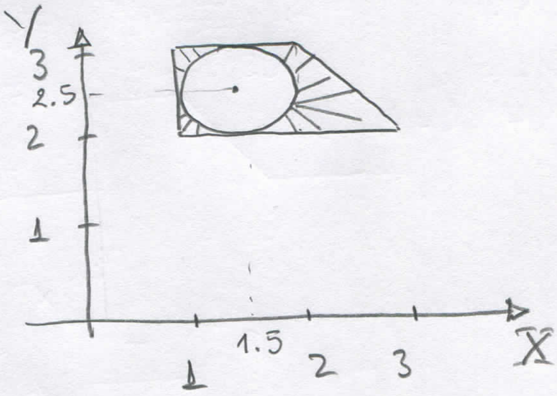
Με άλλα λόγια, δεδομένου του $y \in [2,3]$, η τ.μ. X ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[1, 5-y]$.



(δ) $P(Y \le 2X) = 1 - P(Y > 2X)$

$= 1 - c \cdot E_{AZ\Delta} = 1 - \frac{2}{3}\left(1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right)$

$= \frac{5}{6} = \underline{0.8333}$.



(ε)

$P\left((X-1.5)^2 + (Y-2.5)^2 \ge 0.5^2\right)$

$= 1 - c \cdot$ Εμβαδόν κύκλου με κέντρο το $(1.5, 2.5)$ και ακτίνα 0.5

$= 1 - \frac{2}{3}\pi 0.5^2 = 1 - \frac{\pi}{6} = \underline{0.4764}$

$\boxed{\text{ΘΕΜΑ 4}^{\text{ο}}:}$ (α) $E[Z] = 2E[X] + 3E[Y] - 1 = 2\cdot 1 + 3 \cdot 3 - 1 = \underline{\underline{10}}$

$\mathrm{var}(Z) = \mathrm{var}(2X+3Y-1) = \mathrm{var}(2X+3Y)$

$= \mathrm{var}(2X) + \mathrm{var}(3Y) + 2\,\mathrm{cov}(2X, 3Y)$

$= 4\,\mathrm{var}(X) + 9\,\mathrm{var}(Y) + 12\,\mathrm{cov}(X,Y)$

$= 4 \cdot \sigma_X^2 + 9\,\sigma_Y^2 + 12 \cdot \rho_{X,Y} \cdot \sigma_X \cdot \sigma_Y$

$= 4 \cdot 4 + 9 \cdot 1 + 12 \cdot 0.2 \cdot 2 \cdot 1 = \underline{\underline{29.8}}$

(β) Η τ.μ. Z είναι Γκαουσιανή ως γραμμικός συνδυασμός δύο Γκαουσιανών, της X και Y. : $Z \sim N(10, 29.8)$

(β) $P(Z^2-2Z\leq 0)=P(Z(Z-2)\leq 0)$

$$=P(0\leq Z\leq 2)$$

	0		2	
$-$		$+$		$+ : (Z)$
$-$		$-$		$+ : (Z-2)$

$$=P\left(\frac{0-10}{\sqrt{29.8}}\leq\frac{Z-10}{\sqrt{29.8}}\leq\frac{2-10}{\sqrt{29.8}}\right)$$

$$=\Phi\left(\frac{2-10}{\sqrt{29.8}}\right)-\Phi\left(\frac{-10}{\sqrt{29.8}}\right)$$

$$=\Phi(-1.4655)-\Phi(-1.8319)$$

$$=\Phi(1.8319)-\Phi(1.4655)$$

(γ) Οι τ.μ. W και X είναι ασυσχέτιστες όταν $cov(W,X)=0 \Rightarrow$ $E[WX]=E[W]\cdot E[X]$. Έχουμε ότι

- $E[WX]=E[(X+aY)\cdot X]=E[X^2]+aE[XY]$

$$=var(X)+\mu_X^2+a\left(cov(X,Y)+E[X]\cdot E[Y]\right)$$

$$=4+1^2+a(0.2\cdot 2\cdot 1+1\cdot 3)=5+3.4a$$

- $E[W]\cdot E[X]=(\mu_X+a\mu_Y)\cdot\mu_X=(1+3a)\cdot 1=1+3a$

Επομένως, $5+3.4a=1+3a \Rightarrow \boxed{a=-10}$.

ΘΕΜΑ 5ο (α) $E[V]=E[\pi H R^2]=\pi E[HR^2]$

Καθώς οι H και R είναι ανεξάρτητες,

$$E[V]=\pi E[H]\cdot E[R^2]$$

$H\sim U[0,1] \Rightarrow E[H]=\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2}$

$R\sim U[0,1] \Rightarrow E[R^2]=\frac{0^2+0\cdot 1+1^2}{3}=\frac{1}{3}$

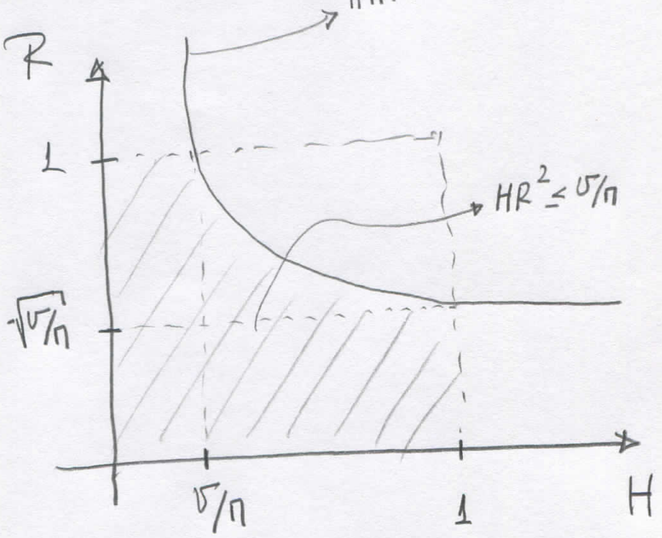
Επομένως, $E[V]=\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{\pi}{6}$ //

(β) $P\left(V > \frac{\pi}{27} \mid H = \frac{1}{3}\right) = P\left(\pi H R^2 > \frac{\pi}{27} \mid H = 1/3\right)$

$= P\left(\pi \frac{1}{3} R^2 > \frac{\pi}{27}\right) = P\left(R^2 > \frac{1}{9}\right) = P\left(R > \frac{1}{3}\right)$

$= \frac{1 - 1/3}{1} = \frac{2}{3}.$

(γ) Καθώς $H \sim U[0,1]$ και $R \sim U[0,1]$, η τ.μ. $V = \pi H R^2$ παίρνει τιμές στο συνεχές διάστημα $[0, \pi]$.



Για $0 \leq V \leq \pi$,

$$F_V(v) = P(V \leq v) = P(\pi H R^2 \leq v) = P(HR^2 \leq v/\pi)$$

$$= \iint_{\{hr^2 \leq v/\pi\}} f_{HR}(h,r)\,dh\,dr = \int_{h=0}^{v/\pi}\int_{r=0}^{1} dr\,dh + \int_{h=\frac{v}{\pi}}^{1}\int_{r=0}^{\sqrt{v/\pi h}} dr\,dh$$

$$= \frac{v}{\pi} + \int_{h=v/\pi}^{1} \sqrt{v/\pi h}\,dh = \frac{v}{\pi} + \sqrt{v/\pi}\int_{h=v/\pi}^{1} h^{-\frac{1}{2}}\,dh$$

$$= \frac{v}{\pi} + \sqrt{v/\pi}\cdot 2\sqrt{h}\Big|_{v/\pi}^{1} = \frac{v}{\pi} + \sqrt{\frac{v}{\pi}}\cdot 2\left(1 - \sqrt{\frac{v}{\pi}}\right)$$

$$= \frac{v}{\pi} + 2\sqrt{\frac{v}{\pi}} - 2\frac{v}{\pi} = 2\sqrt{\frac{v}{\pi}} - \frac{v}{\pi}$$

$$\therefore\quad F_V(v) = \begin{cases} 0 & -\infty < V \leq 0 \\ 2\sqrt{v/\pi} - v/\pi & 0 \leq V \leq \pi \\ 1 & \pi \leq V < +\infty \end{cases}$$

$$P\left(V \leq \frac{\pi}{2}\right) = F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\sqrt{\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\pi}} - \frac{\pi}{2\pi} = \sqrt{2} - \frac{1}{2} = \underline{0.9142}$$

(ϋ) $$f_v(\upsilon) = \frac{dF(\upsilon)}{d\upsilon} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi \upsilon}} - \frac{1}{\pi} & 0 < \upsilon \leq \pi \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$